5/11/2018

<u>Προτάσεις</u> (1) Αν $a | \beta\gamma$ και $\mu\kappa\delta(a,\beta)=1$ $\Big\} \Rightarrow a|\gamma$

(2) Αν $p|\beta\gamma \Rightarrow p|\beta$ ή $p|\gamma$

(3) Αν $\beta|a, \gamma|a$ και $\mu\kappa\delta(\beta,\gamma)=1$ $\Big\}$ $\beta\gamma|a$

$\mu\kappa\delta(\beta,\gamma)=1 \Rightarrow 1=\kappa\beta+\lambda\gamma$

<u>Πρόταση</u> Ο μκδ ακεραίων αριθμών $a_1,\dots,a_n$ δεν αλλάζει αν κάποιοι από αυτούς αντικατασταθούν από τον μκδ τους, δηλαδή:

$$\underbrace{(a_1,\dots,a_s,a_{s+1},\dots,a_n)}_{=d} = \underbrace{(a_1,\dots,a_s,\underbrace{(a_{s+1},\dots,a_n)}_{=\delta})}_{=D}$$

Θα δειχθεί ότι $d|D$: $d=\mu\kappa\delta(a_1,\dots,a_s,a_{s+1},\dots,a_n) \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{ll} \Rightarrow d|a_1 & d|a_1 \\ d|a_2 & d|a_2 \\ \vdots & \vdots \\ d|a_s & d|a_s \\ \left.\boxed{\begin{array}{l} d|a_{s+1} \\ \vdots \\ d|a_n \end{array}}\right\} \Rightarrow d|\delta & \end{array}\right\} \Rightarrow d|\mu\kappa\delta(a_1,\dots,a_s,\delta)=D$$

Άρα $d|D$

Θα δειχθεί ότι $D|d$: $D=\mu\kappa\delta(a_1,\dots,a_s,(a_{s+1},\dots,a_n))$
$=\mu\kappa\delta(a_1,\dots,a_s,\delta)$

$$\begin{array}{l} \Rightarrow D|a_1 \\ D|a_2 \\ \vdots \\ D|a_s \\ D|\delta=\mu\kappa\delta(a_{s+1},\dots,a_n) \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} D|a_1 \\ D|a_2 \\ \vdots \\ D|a_s \\ D|\delta|a_{s+1} \\ D|\delta|a_n \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} D \text{ κοινός διαιρέτης} \\ \text{των } (a_1,\dots,a_n) \\ \Rightarrow D|\mu\kappa\delta(a_1,\dots,a_n)=d \end{array}$$

Άρα $D|d$

Συνεπώς $D=d$.

→ $a,\beta \to \mu\kappa\delta(a,\beta)$
$\mu\kappa\delta(a,\beta,\gamma)=\mu\kappa\delta(a,\mu\kappa\delta(\beta,\gamma))$
$(a,\beta,\gamma,\delta)=(a,(\beta,(\gamma,\delta)))$

Θεώρημα Ευκλείδη Έστω a και b ακέραιοι με $b \neq 0$. Αν το $a = qb + r$, τότε $\mu\kappa\delta(a,b) = \mu\kappa\delta(b,r)$

Θέτω $\mu\kappa\delta(a,b) = d_1$ και $\mu\kappa\delta(b,r) = d_2$

$$d_1 = \mu\kappa\delta(a,b) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d_1 / a \\ d_1 / b \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} d_1 / \boxed{1}a - \boxed{q}b = r \Rightarrow \\ d_1 / b \end{array}$$

$\Rightarrow d_1$ κοινός διαιρέτης των $b, r \Rightarrow d_1 / d_2$

$$d_2 = (b,r) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d_2 / b \\ d_2 / r \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} d_2 / b \\ d_2 / \boxed{q}b + \boxed{1}r = a \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} d_2 / b \\ d_2 / a \end{array}$$

$\Rightarrow d_2 / \mu\kappa\delta(a,b) = d_1$. Άρα d_2 / d_1

Επομένως $\left.\begin{array}{l} d_2 / d_1 \\ d_1 / d_2 \end{array}\right\} \Rightarrow d_1 = d_2$

* Αλγόριθμος Του Ευκλείδη *

$a, b \in \mathbb{N}_0$ και $b \neq 0$

$\underline{a} = q\underline{b} + \underline{r}, \quad 0 \leq r < b$

$\underline{b} = q_1 \cdot \underline{r} + \underline{r_1}, \quad 0 \leq r_1 < r$

$\underline{r} = q_2 \cdot \underline{r_1} + \underline{r_2}, \quad 0 \leq r_2 < r_1$

{ Υπογραμμίζω όλους τους αριθμούς εκτός απο το πηλίκο }

$\vdots$

$\underline{r_{n-1}} = q_n \underline{r_n} + \underline{r_{n+1}}, \quad 0 \leq r_{n+1} < r_n$

$\underline{r_n} = q_{n+1} \underline{r_{n+1}} + \underline{0}$

$\underbrace{r_{n+2}}_{=0} < r_{n+1} < r_n < \dots < r_2 < r_1 < r$

Το τελευταίο μη-μηδενικό υπόλοιπο είναι ο μκδ των a, b

$(a,b) = (b,r) = (r,r_1) = (r_1,r_2) = \dots = (r_n, r_{n+1}) =$

$= (r_{n+1}, 0) = r_{n+1}$

Παράδειγμα Βρείτε το μκδ$(153, 71)$ Είναι μοναδικοί?

$153 = 2 \cdot 71 + 11$ $\qquad 1 = \boxed{13} \cdot 153 + \boxed{-28}\, 71$

$71 = 6 \cdot 11 + 5$

$11 = 2 \cdot 5 + 1$ $\qquad 1 = 11 - 2 \cdot 5 = 11 - 2(71 - 6 \cdot 11)$

$5 = 5 \cdot 1 + 0$ $\qquad = 13 \cdot 11 - 2 \cdot 71 = 13(153 - 2 \cdot 71) - 2 \cdot 71$

Άρα μκδ$(153, 71) = 1$ $\qquad = 13 \cdot 153 - 28 \cdot 71$

$d = \kappa\alpha + \lambda\beta$ πρέπει $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$

Θεώρημα Κάθε φυσικός αριθμός $\alpha > 1$ μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πεπερασμένου πλήθους πρώτων αριθμών όχι απαραίτητα διαφορετικών μεταξύ τους με μοναδικό τρόπο. (αν δεν λάβουμε υπ' όψιν τη σειρά που γράφουμε τους παράγοντες).

Παράδειγμα $2 = 2$

$300 = 3 \cdot 100 = 3 \cdot 2 \cdot 50 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 25 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$

$= 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^2$

- $\alpha > 1$: $\alpha = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_s^{a_s}$, $p_i \neq p_j$, $a_i \in \mathbb{N}$ πρωτογενής ανάλυση

Σχεδιάγραμμα απόδειξης:

$\alpha > 1$:
- πρώτος
- σύνθετος $\alpha = \beta\gamma$, $1 < \beta < \alpha$, $1 < \gamma < \alpha$
  - πρώτοι / σύνθετοι
  - πρώτοι / σύνθετοι

$P(n)$

$P(1)$ ✓

Υποθέτουμε ότι ισχύει για όλα τα $1 \leq k \leq n$ και δείχνουμε ότι ισχύει για το $n+1$

$p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_s^{a_s} = a = q_1^{b_1} q_2^{b_2} \cdots q_t^{b_t} = p_1(b)$

$p_i \to$ πρώτοι $\qquad q_i \to$ πρώτοι

$p_1 / p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s} = a = \overbrace{q_1 \cdots q_1}^{b_1-\text{φορές}} \cdots \overbrace{q_t \cdots q_t}^{b_t-\text{φορές}}$

p_1 πρώτος

$p_1 / q_i \Rightarrow p_1 = q_i$

$\to a > 1$

$a = q_1 q_2 \cdots q_t$, $q_i \to$ πρώτοι αριθμοί

$= p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_s^{a_s}$, $0 < a_1$ πρωτογενής ανάλυση του a

Παράδειγμα Βρείτε την πρωτογενή ανάλυση του 1204

$1204 = 2 \cdot 602 = 2^2 \cdot 301 = 2^2 \cdot 7 \cdot 43$ πρωτογενής ανάλυση του 1204.

Παρατήρηση Έστω $a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_s^{a_s}$ η πρωτογενής ανάλυση ενός φυσικού αριθμού $a > 1$. Ο φυσικός αριθμός δ είναι διαιρέτης του a αν και μόνο αν ο δ είναι της μορφής

$\delta = p_1^{\delta_1} \cdots p_s^{\delta_s}$ με $0 \leq \delta_i \leq a_i$

p_i, p_j διαφορετικοί πρώτοι για $i \neq j$

* δεν είναι απαραίτητα η πρωτογενής ανάλυση του δ, γιατί κάποιοι εκθέτες μπορεί να είναι μηδέν.

Παράδειγμα Βρείτε όλους τους διαιρέτες του 1204

$1204 = 2^2 \cdot 7^1 \cdot 43^1$

$\delta / 1204 \Rightarrow \delta = 2^{\delta_1} \cdot 7^{\delta_2} \cdot 43^{\delta_3}$, $\left.\begin{array}{l} 0 \leq \delta_1 \leq 2 \to 3 \text{ τιμές} \\ 0 \leq \delta_2 \leq 1 \to 2 \text{ τιμές} \\ 0 \leq \delta_3 \leq 1 \to 2 \text{ τιμές} \end{array}\right\}$ $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ διαιρέτες συνολικά

Όλοι οι διαιρέτες του 1204: $\{2^0 \cdot 7^0 \cdot 43^0, 2^1 \cdot 7^0 \cdot 43^0, 2^2 \cdot 7^0 \cdot 43^0, 2^0 \cdot 7^1 \cdot 43^0, 2^1 \cdot 7^1 \cdot 43^0, 2^2 \cdot 7^1 \cdot 43^0, 2^0 \cdot 7^0 \cdot 43^1, 2^1 \cdot 7^0 \cdot 43^1, 2^2 \cdot 7^0 \cdot 43^1,$

$, 2^0 \cdot 7^2 \cdot 43^2, 2^1 \cdot 7^2 \cdot 43^2, 2^2 \cdot 7^2 \cdot 43^2 \}$, 12 διαιρέτες.

→ Το πλήθος των διαιρετών του $a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_s^{a_s}$ είναι
$T(a) = (a_1+1)(a_2+1)\dots(a_s+1)$

<u>Παράδειγμα</u> Βρείτε ένα φυσικό αριθμό που έχει ακριβώς 4 διαιρέτες.

$T(2^3) = 3+1 = 4$

$T(3^3) = 3+1 = 4$

$T(p^3) = 3+1 = 4$

↳ p: πρώτος

$T(2^1 \cdot 3^1) = (1+1)(1+1) = 4$

$T(p^1 \cdot q^1) = (1+1)(1+1) = 4$

↳ p, q: πρώτοι διαφορετικοί μεταξύ τους.

<u>Παράδειγμα</u> Βρείτε ένα φυσικό αριθμό που έχει ακριβώς 11 διαιρέτες.

$T(2^{10}) = 11$

$T(p^{10}) = 11$

↳ p: πρώτος.